



UNIFE D. Mari

Le frazioni sono sempre difficili

DALLE FRAZIONI AI NUMERI RAZIONALI

23 Novembre 2012

Daniela Mari
Professore associato
Università di FERRARA
Dipartimento di Matematica





UNIFE D. Mari

Il processo di **insegnamento-apprendimento** delle **frazioni**, e quindi dei **numeri razionali**, è da lungo tempo al centro dell'attenzione di chi insegna matematica o si occupa di didattica ,
forse perché costituisce uno dei più evidenti insuccessi della scuola.



UNIFE D. Mari

Occorre subito evidenziare che vi è una grande **differenza** fra “frazione” e “numero razionale”, mentre spesso i due concetti vengono confusi e malamente sovrapposti.

Evidenti difficoltà ed errori in tale senso si riscontrano anche, ed ancora, in ingresso all’Università.



UNIFE D. Mari

Oggettivamente, sia la costruzione del concetto di frazione, sia quella di numero razionale, presentano notevoli ostacoli che spesso uno studente della Scuola Primaria, ma talvolta anche della Secondaria, non ha la capacità cognitiva o la maturità critica di affrontare.





UNIFE D. Mari

Tuttavia, l'attuale società rende ormai **doveroso** includere tali conoscenze nel bagaglio culturale di ogni cittadino.

In qualsiasi mestiere è necessario capire il significato di $\frac{1}{4}$, di $\frac{3}{5}$, di 0,5 o 1,25.

Lo stesso sistema monetario di quasi tutte le nazioni prevede una certa conoscenza dei numeri razionali, almeno di quelli positivi.



UNIFE D. Mari

Dunque

i **numeri razionali** hanno uno statuto sociale che li rende **competenze auspicabili per tutti**.

E' in questo contesto che la trasposizione didattica di concetti così ostici, e tuttavia indispensabili, costituisce un'occasione di **grande rilevanza per l'insegnante**, un momento nel quale la sua professionalità e creatività risultano determinanti .



UNIFE D. Mari

L'introduzione del concetto di “ frazione ” avviene nella scuola elementare.

Purtroppo, da tutte le ricerche che si susseguono da molti anni sul tema, risulta che,
forse a causa:



UNIFE D. Mari

- delle ovvie necessità didattiche dovute all'**età degli allievi**,
- dei **diversi significati** attribuiti via via al termine **frazione**, che si alternano, senza essere distinti e confrontati,





UNIFE D. Mari

l'insegnamento tradizionalmente seguito è spesso **origine** di molte delle **misconcezioni** relative alle frazioni che costituiscono:

- la causa di molte delle **difficoltà** e degli errori che spesso si riscontrano nel loro utilizzo,

- gli **ostacoli** principali alla successiva corretta acquisizione del concetto di numero razionale.



UNIFE D. Mari

Naturalmente **alcune** di queste misconcezioni sono **funzionali** alla costruzione del concetto (purché momentanee ...); è sulle altre che occorre lavorare.

Osserviamo come, in generale, avviene il primo intervento didattico sulle frazioni.



UNIFE D. Mari

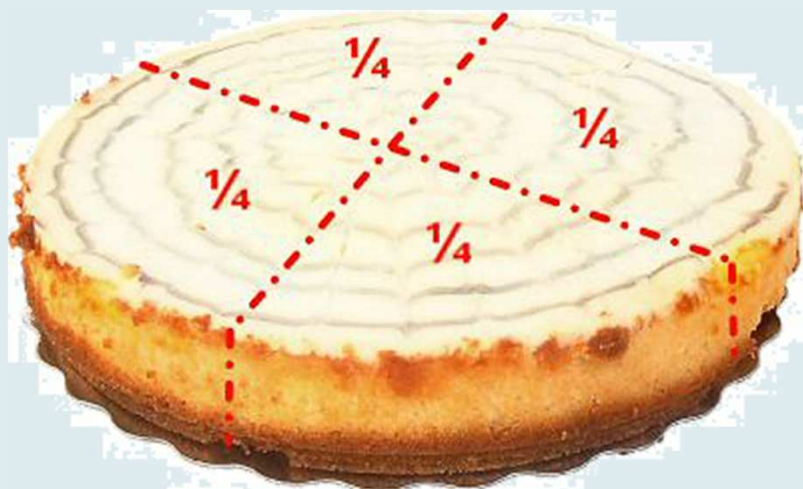
La procedura più diffusa consiste nell'introdurre il concetto di frazione nell'accezione di

A. parte uguale di un tutto

cioè il termine frazione indica ciascuna delle parti di una grandezza che è stata divisa in parti uguali.



UNIFE D. Mari



La classica torta,
rigorosamente tonda, è
divisa in 4 fette uguali;
ognuna di esse è

$\frac{1}{4}$ della torta.

La scrittura **$\frac{1}{4}$** (unità frazionaria) sta ad
indicare **una sola** delle **4 parti uguali** in cui
è divisa l'intera torta.



UNIFE D. Mari



Poi, di tali parti
uguali se ne
prendono solo
alcune, passando
dalle
unità frazionarie
alle
frazioni proprie.



UNIFE D. Mari

Questa accezione di frazione dell'unità ha il **vantaggio** di essere facilmente acquisibile e modellizzabile;
ma ha il **difetto** di non essere teoricamente sufficiente per tradurre le varie interpretazioni che, come vedremo, si danno successivamente a tale termine.



UNIFE D. Mari

Si procede poi con operazioni di taglio, coloritura, piegatura di fogli...

Si dividono in parti uguali pizze, nastri, barrette di cioccolato o sacchetti di caramelle, mazzi di matite e così via.





UNIFE D. Mari

In realtà queste procedure, **se troppo ripetute** :

- agiscono da **ostacolo** nella costruzione delle successive conoscenze nell'ambito frazioni e ancor di più nel necessario processo di **astrazione** che condurrà ai razionali.



UNIFE D. Mari

1. Quando viene introdotto il concetto di frazione, il bambino ha già incontrato tale termine nella quotidianità ma con l'accezione di **una parte non ben quantificata e staccata di un tutto**

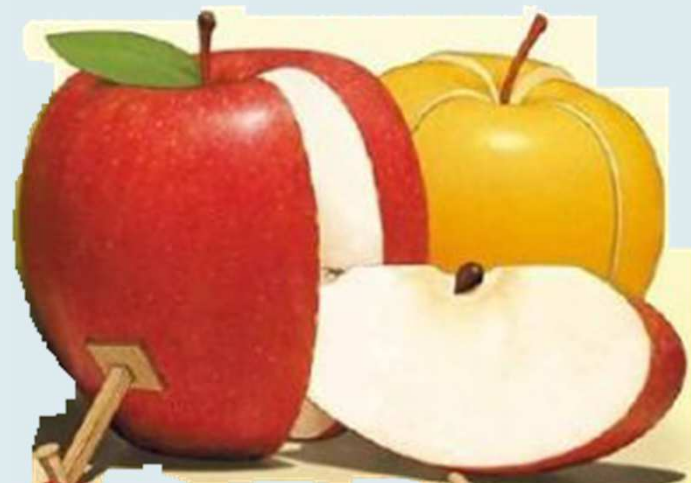
Per esempio nelle espressioni:

frazione di un secondo, frazione di una tappa,
frazione di una città, ...



UNIFE D. Mari

Eppure un richiamo ed un confronto con
l'uso quotidiano del termine è spesso
insufficiente o addirittura mancante.
Non si potrebbe introdurre il termine un po'
prima, esplorandone i diversi usi e significati,
in modo da poter far risaltare il carattere più
strutturato, didattico,
tutto sommato artificiale,
introdotto poi?





UNIFE D. Mari

2. Si sottolinea continuamente che il tutto deve essere diviso in **parti uguali**.

Spesso il bambino tace, perché ciò gratifica il suo senso di giustizia (almeno in matematica) ma egli sa bene che le fette di torta **non possono** essere tutte uguali....

specialmente se è a forma di cuore e con le decorazioni di zucchero...



UNIFE D. Mari

E poi che cosa significa parti uguali?

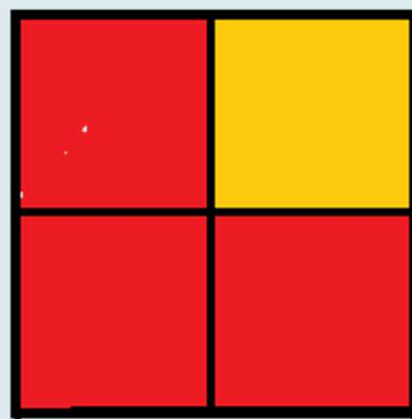
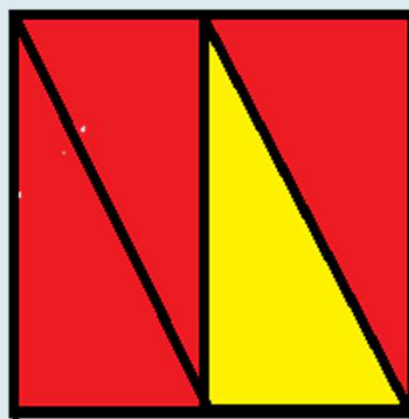
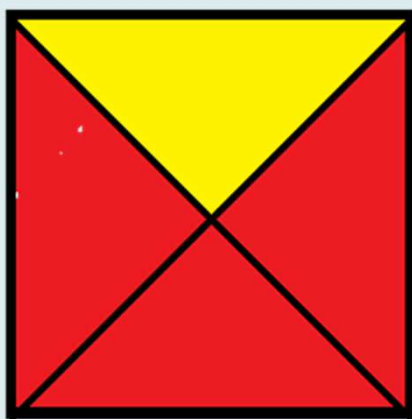


Questa tavoletta di cioccolato è stata divisa in parti uguali?



UNIFE D. Mari

Le parti evidenziate sono uguali fra loro ?





UNIFE D. Mari

Effettivamente noi adulti usiamo il termine uguale, a seconda dei contesti, con il significato di:

congruente, equi-esteso, equi-numeroso, di ugual peso ... anche se

1/4 di pollo è uguale ad un altro se ha lo stesso peso? È indifferente petto o coscia?



UNIFE D. Mari

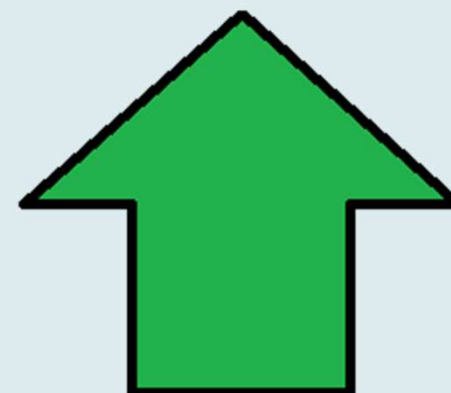
3. Quando si propongono attività di frazionamento, si presentano **solo figure “facili”** da frazionare che, ovviamente, finiscono con l'appartenere alle solite due-tre tipologie (la torta, la tavoletta di cioccolato, le caramelle, i quadrati, i rettangoli...).



UNIFE D. Mari

Il rischio è di generare in loro la convinzione che non si possono trovare frazioni di tutte le figure piane e solide. I bambini arrivano a pensare che sia possibile trovare frazioni solo per alcune particolari forme.

E non, per esempio:





UNIFE D. Mari

L'uso **continuo e costante** di cerchi e rettangoli rende l'immagine persistente e stabile, immagine che si fa modello e

.... **può influenzare negativamente** la costruzione di un concetto perché il bambino punterà la sua attenzione su quello e non sul processo di astrazione a cui il docente fa riferimento. (Piaget)



UNIFE D. Mari

4. L'immagine proposta per la costruzione della frazione $\frac{3}{4}$, dividere il tutto in 4 parti uguali e prenderne 3, rinvia a **modalità del contare** proprie dei numeri naturali.

La conoscenza acquisita in un campo, trascinata in un altro ritenuto simile, produce spesso un ostacolo.



Ritroveremo successivamente traccia di ciò
in alcuni dei cosiddetti errori tipici:

-nell'algoritmo dell'addizione :

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \dots \frac{3}{8} !$$

-nella persistente difficoltà di ordinamento:

$$\frac{2}{3} < \dots \frac{4}{9} !$$

-nella ricerca di un ipotetico successivo:

$$\text{il successivo di } \frac{2}{5} \text{ è } \dots \frac{3}{5} !$$



UNIFE D. Mari

5. L'immagine di dividere una unità-tutto in parti uguali e prenderne **alcune** suggerisce che questo alcune **non** possa essere **tutte**.

Ciò evidentemente pregiudica il passaggio alle frazioni unità $\frac{n}{n}$

(il non senso: perché dividere la torta in 4 parti uguali per poi prenderle tutte?)

ma soprattutto quello alle frazioni improprie.



UNIFE D. Mari

Volendo mantenere la frazione come parte uguale di un tutto, per dare un senso a $\frac{5}{4}$

si dice:

prendo **2** torte, le divido ognuna in 4 parti e ne prendo 5.

Perché proprio 2?

E invece per $\frac{11}{4}$ ne prendo **3**?

Qual è dunque l'unità da dividere?





UNIFE D. Mari

L'idea di parte di **un** tutto si allarga a quella di " numero di parti " ottenute dividendo **una o più** grandezze- unità; stiamo utilizzando il significato di frazione come:

B. numero somma di parti uguali

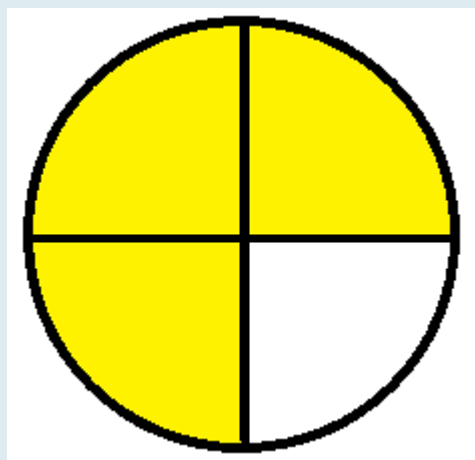
ottenute dividendo **tante unità (quante indicate dal numeratore)**, in tante parti uguali (quante indicate dal denominatore).



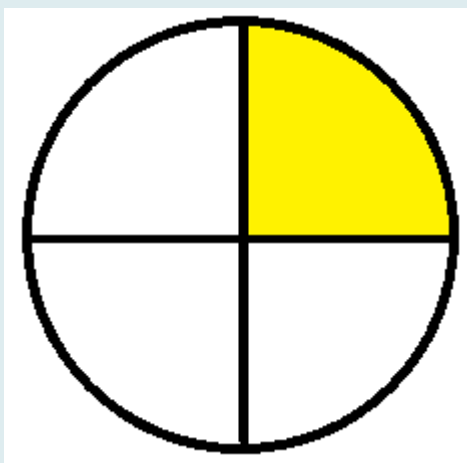
UNIFE D. Mari

Con tale accezione :

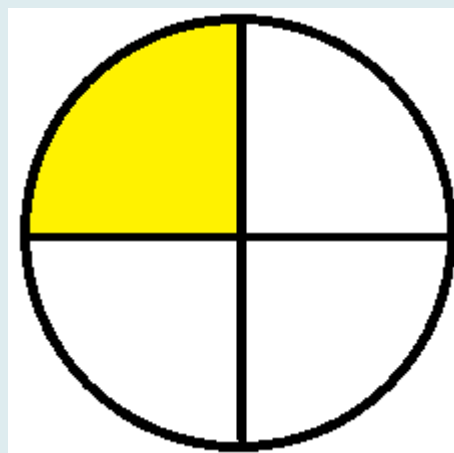
$$\frac{3}{4}$$



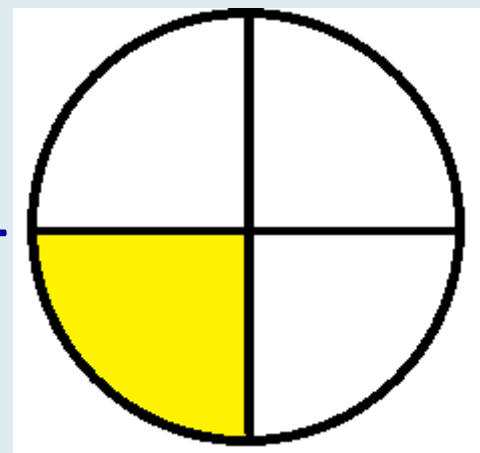
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$



+



+



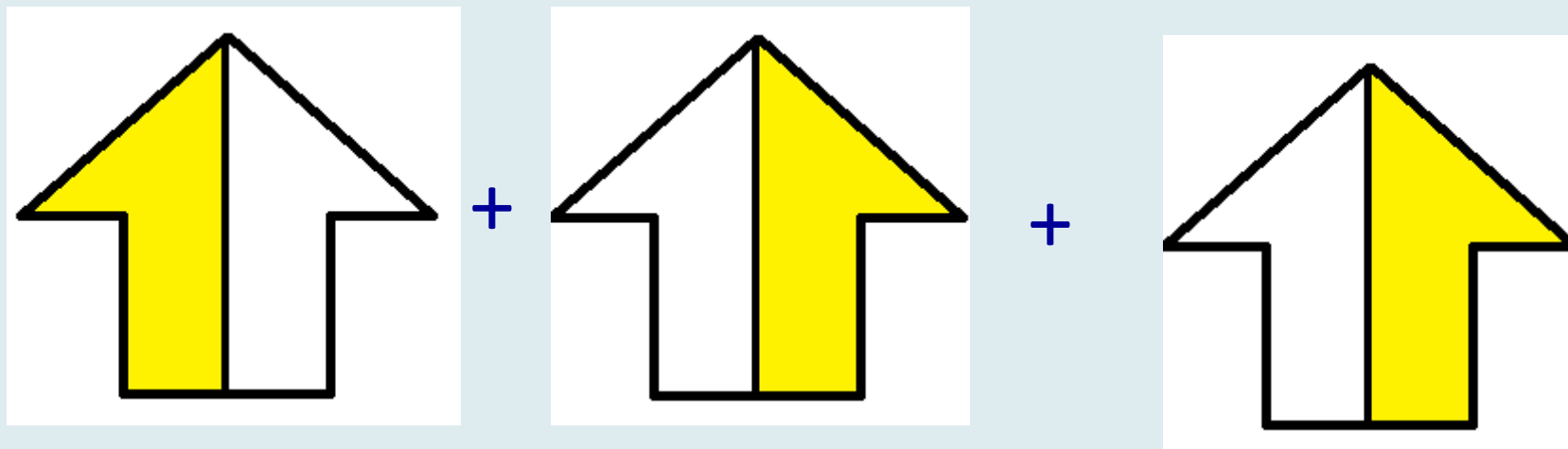
3 unità ognuna da dividere in **4** parti

Ma anche



UNIFE D. Mari

$$\frac{3}{2}$$



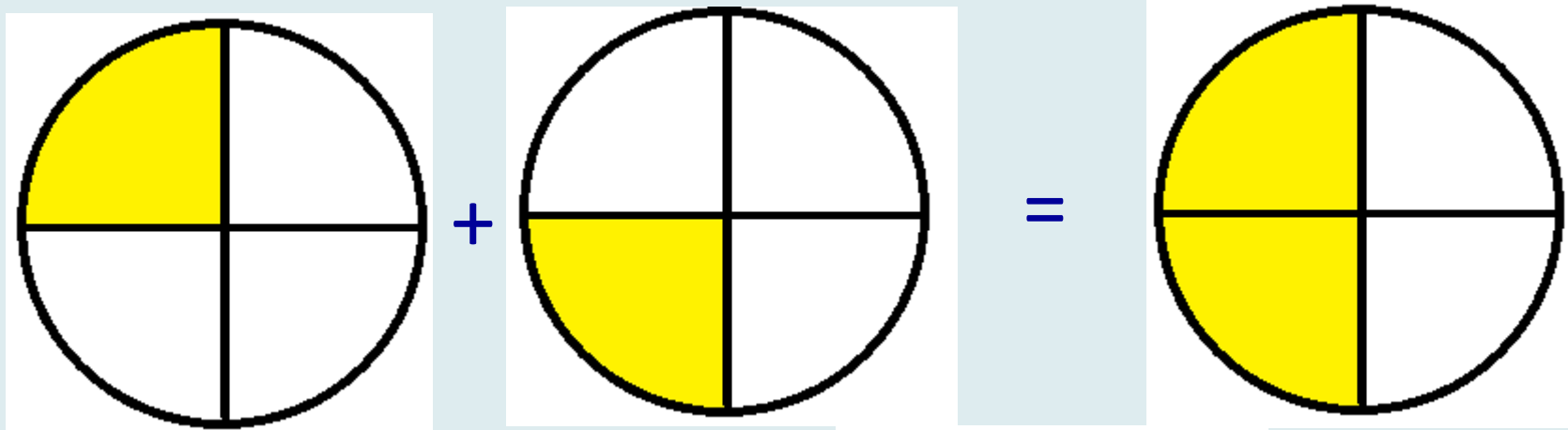
3 unità ognuna da dividere in **2** parti



UNIFE D. Mari

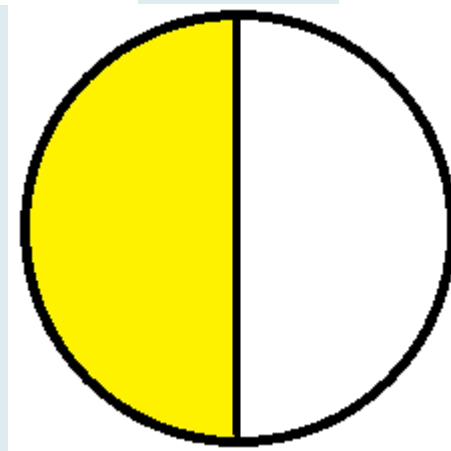
Osserveremo poi che:

$\frac{1}{4}$ di torta più $\frac{1}{4}$ di torta, cioè $\frac{2}{4}$



è equivalente a

$\frac{1}{2}$ di torta





UNIFE D. Mari

(effettivamente $\frac{50}{100}$ di torta,
una montagna di briciole, è solo equivalente,
ma certo non uguale a $\frac{1}{2}$ di torta!)

Solo nell'ambito numerico scriveremo

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



UNIFE D. Mari

L'idea successiva di frazione che viene data (spesso senza dirlo) è quella di:

C. esecuzione di una operazione di divisione

La scrittura $\frac{m}{n}$ come indicazione di effettuare la divisione di m per n .



UNIFE D. Mari

Un esempio tipico è:

Quale frazione di caramelle spetta ad ognuna delle 5 bambine?

Si sta chiedendo di effettuare la divisione di 20 per 5.





UNIFE D. Mari

In casi come questi (quantità discrete) si è purtroppo bene attenti a presentare casi in cui la divisione è esatta.

Sarebbe invece un'ottima occasione per mostrare che le caramelle possono anche essere spezzate, mentre le biciclette no, e passare dalle **frazioni di** ai **numeri frazionari**.



UNIFE D. Mari

Prima di questo ulteriore passaggio, gli allievi si ritrovano a dover affrontare un'altra accezione del termine frazione:

D. frazione come operatore moltiplicativo

E' solitamente inconsapevolmente introdotto quando domande come la precedente vengono formalizzate nei cosiddetti problemi.



UNIFE D. Mari

A questo punto , la frattura allievo -concetto di frazione, che il docente si è sforzato di far passare ,si compie spesso definitivamente.

Il ragazzo trova in genere del tutto **illogico** che:
prendere $\frac{3}{5}$ di 20 caramelle
(che sottintende l'idea di divisione)

si traduca con: $\frac{3}{5} \times 20$





UNIFE D. Mari

In **ambito matematico** infatti l'ordine delle due operazioni "dividere per 5 e moltiplicare per 3" è **indifferente**, mentre così **non** è quando si opera **nel concreto**.

Occorre un passaggio di astrazione non sempre sufficientemente didatticamente curato per capire che, per la risoluzione "su carta" di un problema, l'ordine delle procedure è indifferente.



UNIFE D. Mari

E' richiesto un ulteriore gradino di astrazione
(che purtroppo riscontro spesso non essere
avvenuto neppure in età adulta)
quando si passa al concetto di:

E. frazione come quoziente calcolato
più comunemente detto
numero frazionario



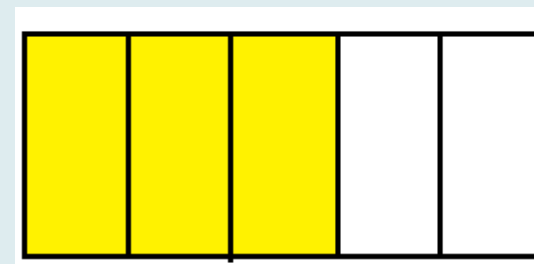
UNIFE D. Mari

Si tratta di capire che, a questo punto,

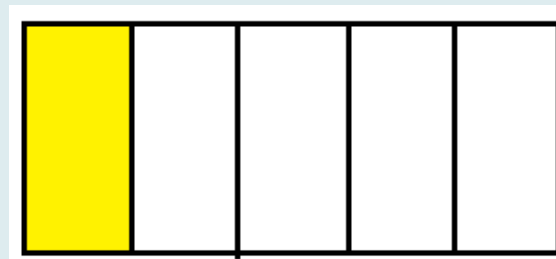
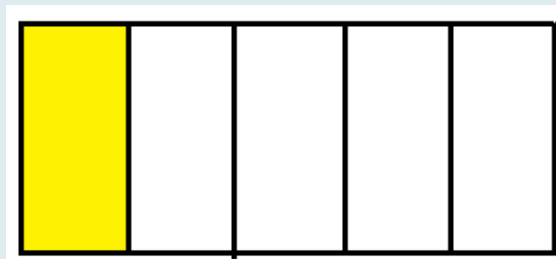
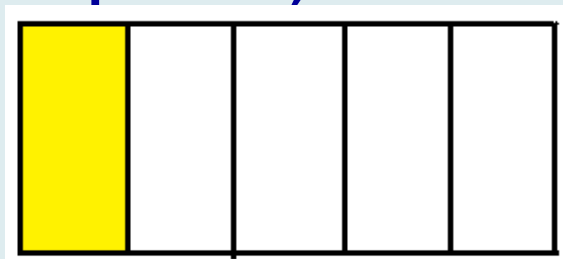
$\frac{3}{5}$

non è più:

-immaginare di rompere
qualcosa in 5 parti uguali
prendendone 3;



-**né** voler trovare il risultato della divisione di
3 per 5;





UNIFE D. Mari

Ma, leggendo 3 fratto 5,
così come più tardi si leggerà $\frac{m}{n}$,
si è **già** calcolato il quoziente,
cioè la divisione non è solo indicata, ma
da considerarsi **già** effettuata.



UNIFE D. Mari

Questo registro di comprensione resta spesso **per sempre** fumoso.

A chi non è capitato di sentire:

Se $\frac{6}{3}$ fa 2 e $\frac{5}{4}$ fa 1,25

allora “quanto fa ” $\frac{1}{3}$?





UNIFE D. Mari

Oltre alle accezioni viste fin qui, nel corso degli studi i ragazzi incontreranno **altre interpretazioni** del termine, purtroppo spesso non adeguatamente comparate alle precedenti.

Per esempio:



F. frazione come rapporto (proporzioni)

Se i due segmenti AB e CD hanno lunghezza

$\overline{AB}=30cm$ e $\overline{CD}=25cm$ diremo che

il rapporto fra AB e CD è $\frac{6}{5}$

e scriveremo $AB : CD = 6 : 5$

o anche $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{5}$



UNIFE D. Mari

G. frazione come rapporto su un tutto

Se, in una classe di 20 allievi, 5 sono assenti, diciamo che la frazione di assenti è di

5 allievi **su** 20 che traduciamo, alla lettera,

con $\frac{5}{20}$

concludendo che:

gli assenti sono $\frac{1}{4}$ del totale.



UNIFE D. Mari

H. frazione come percentuale

Se si sta facendo un'analisi statistica, nell'esempio precedente può essere più significativo scrivere:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100}$$

concludendo che:

gli assenti sono il 25 % del totale.



UNIFE D. Mari

Si osservi come la lettura:

25 **per** 100

sia totalmente scollata dal significato di
quoziente attribuito alla frazione

$$\frac{25}{100}$$

Forse per questo la percentuale non è
generalmente riconosciuta come frazione?



UNIFE D. Mari

Nella pratica quotidiana, inoltre, le percentuali fanno un **uso misto di frazioni e decimali**, combinando competenze e rappresentazioni diverse.

Se, per esempio, gli allievi assenti di una scuola sono 55 su un totale di 1750, si dirà che la percentuale di assenti è **circa il**

3,1 %



UNIFE D. Mari

Ci sono anche altre accezioni del termine frazione:

- in probabilità
- nei punteggi
- nella vita quotidiana



(sono le 2 e mezza, la salita ha una pendenza del 15% , lo zucchero deve essere $\frac{1}{4}$ della farina, ...)

ed altre ancora, e spesso con regole e aritmetiche del tutto differenti.



UNIFE D. Mari

La **molteplicità e complessità dei significati** presenti nel concetto di frazione danno conto della **instabilità** tipica **delle abilità** di lavoro con le frazioni.

D'altra parte, la ricerca didattica sembra dimostrare che **l'intreccio tardivo** delle varie accezioni **blocchi la maturazione** del concetto e consenta solo un uso forzato, improduttivo ed insicuro degli aspetti formali.



UNIFE D. Mari

Prima o poi, comunque, lungo il corso degli studi, la frazione deve (dovrebbe?) trasformarsi in
numero razionale.



Questo passaggio è molto delicato e certamente non indolore, specialmente se si tiene conto di tutto quanto è stato sopra esposto.



UNIFE D. Mari

La presentazione dei numeri razionali utilizzando le frazioni avviene nei primi anni delle Scuole Secondarie superiori di secondo grado.

Purtroppo succede spesso che, nel passaggio da un livello scolastico all'altro, è l'**accezione** stessa **di frazione** che **subisce un cambiamento**, spesso inespresso, rispetto a quella precedentemente interiorizzata.



UNIFE D. Mari

La definizione di frazione oggi più comune è la seguente:

*Se m , n sono due numeri interi, con $n \neq 0$, si dice frazione la **scrittura** $\frac{m}{n}$.*

La nuova accezione di frazione come semplice scrittura è spesso sottaciuta, forse perché è vista come un processo di generalizzazione a cui gli studenti non sono sensibili.



UNIFE D. Mari

Ritengo invece sia **necessario evidenziare** in quale contesto e per quale fine se ne adotti una nuova, al fine di evitare che **l'ulteriore sovrapporsi di idee e linguaggi** generi quelle difficoltà ed ostacoli di carattere cognitivo che così facilmente si trasformano nei noti, e purtroppo assai diffusi, atteggiamenti di **rifiuto nei confronti di tutta la matematica.**





UNITE D. Mari

Dopo la definizione citata, molti testi del biennio insistono ancora sulle *frazioni proprie, improprie e apparenti* che, nell'ambito attuale, **non hanno più alcun senso.**

La frazione $\frac{-3}{-2}$ è propria o impropria?

$-3 < -2$ ma, vedremo fra breve, la frazione è equivalente a $\frac{3}{2}$.

E $\frac{-3}{2}$?



UNIFE D. Mari

Spesso anche la **relazione di equivalenza** tra frazioni è presentata in modo impreciso.

Eppure è proprio questo il concetto chiave nella costruzione dei razionali, che **darà significato** a molte delle “misteriose regole” sulle nuove frazioni.



Dopo aver osservato che:

$\frac{1}{2}$ è *equivalente* a $\frac{2}{4}$, a $\frac{8}{16}$, a $\frac{50}{100}$...

e ... averne dedotto che la frazione $\frac{m}{n}$ è
equivalente alla frazione $\frac{am}{an}$

(dove al solito i numeri sono interi non nulli)



UNIFE D. Mari

“si evince” che $\frac{m}{n}$ è *equivalente* a $\frac{r}{s}$ se
e solo se:

$$ms = nr$$



Il procedimento non è
proprio trasparente.



UNIFE D. Mari

Si noti innanzitutto come, per dare significato ai nuovi termini matematici, le espressioni *frazioni* ed *equivalenti* siano utilizzate nel loro significato corrente; l'attribuzione del **nuovo senso** avviene ancora una volta attraverso parole del **linguaggio quotidiano**, utilizzando una sorta di **bilinguismo** di cui occorre essere coscienti, per poter iniziare a separare il parlare comune da quello matematico.



UNIFE D. Mari

Osserviamo poi che, mentre il passaggio logico:

la frazione $\frac{m}{n}$ è *equivalente* alla frazione $\frac{am}{an}$

è piuttosto **ragionevole**, la conclusione risulta affrettata ed oscura.

Dobbiamo quindi riflettere qual è un modo per stabilire se due generiche frazioni sono o no equivalenti.



UNIFE D. Mari

Le conclusioni precedenti sembrano indicare che il sistema più economico per risolvere la questione sia:

- sostituire entrambe le frazioni con altre ad esse equivalenti, ma con denominatore uguale,
- poi verificare se i due numeratori sono uguali.



Dunque, se sono date $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$

poiché il denominatore comune più evidente è ns ,

-sostituiamo entrambe le frazioni date con

$$\frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{nr}{ns}$$

-poi confrontiamo i due numeratori, che sono uguali solo se

$$ms = nr$$



UNIFE D. Mari

A questo punto la definizione di frazioni equivalenti risulta più sensata:

Date due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ esse sono dette equivalenti, e si scrive $\frac{m}{n} \sim \frac{r}{s}$ se

$$ms = nr$$

dove i numeri sono interi,
con n e s diversi da 0





UNIFE D. Mari

Osserviamo subito che, proprio la relazione di equivalenza appena definita, ci permette, data una frazione con denominatore negativo, di sostituirla con una ad essa equivalente ma con **denominatore positivo**.

E' proprio per questo che, comunemente, quando si scrive o si pensa ad una frazione, se ne considera una con il denominatore positivo.



UNIFE D. Mari

Una delle *regole* spesso rimarcate e che ritengo tutta da discutere è l'imperativo di *ridurre **sempre** ai minimi termini* le frazioni dividendo numeratore e denominatore per il loro M.C.D..

E spesso si aggiunge: se al termine di tale operazione, detta *semplificazione*, le due frazioni risultano uguali, allora le frazioni date sono equivalenti.



UNIFE D. Mari

Questa prescrizione presenta diverse ambiguità.

Innanzitutto, è solo nell'ambito dei numeri interi positivi che comunemente si parla di M.C.D.;
inoltre non è sempre così semplice determinare il M.C.D. fra due qualunque naturali, perché questo richiede una loro fattorizzazione.



UNIFE D. Mari

Si pensi, ad esempio, di voler semplificare

$$\frac{1651}{1677} \quad \text{o} \quad \frac{3157}{2717}$$

Se dunque il punto è riconoscere se due frazioni sono equivalenti, la riduzione ai minimi termini può non essere il procedimento più conveniente.



UNIFE D. Mari

Osserviamo poi come, per esempio,
rispetto a $\frac{1}{5}$ sia molto più espressiva:

- $\frac{20}{100}$ se traduce la percentuale 20% ;
- $\frac{4}{20}$ se traduce la probabilità che si verifichi un certo evento con 4 casi favorevoli tra 20 possibili;
- $\frac{5}{25}$ se deve essere sommata con $\frac{3}{25}$.

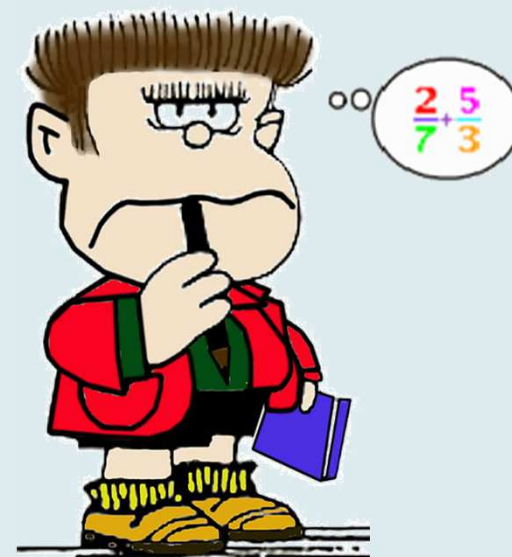


UNIFE D. Mari

Si prosegue poi definendo addizione e moltiplicazione fra frazioni ed una relazione d'ordine;

non credo che questa prassi sia didatticamente coerente con l'approccio appena visto.

Non ha molto senso operare con "scritture"; di più:





UNIFE D. Mari

le motivazioni che inducono a dare quella certa definizione di addizione o moltiplicazione piuttosto di altre sono **comprensibili solo** nell'ambito della struttura numerica che verrà costruita a partire non dalle frazioni, ma dalle classi di equivalenza indotte dalla relazione appena vista.



UNIFE D. Mari

Occorre prima passare ai numeri razionali.

In genere si dà la seguente definizione:

Un numero razionale è un insieme costituito da tutte le frazioni fra loro equivalenti.

La genericità del termine “insieme” non rende giustizia alla profondità del processo che si sta compiendo,
ed infatti, non a caso, in gergo matematico si parla di *classi di equivalenza*,



UNIFE D. Mari

... ma mi rendo conto che la collocazione temporale di questo argomento fa sì che il discorso sia difficilmente affrontabile.

Occorre però **subito** sottolineare l'*abuso di linguaggio* usualmente compiuto quando si ragiona con i razionali:



UNIFE D. Mari

abituamente, per ragioni storiche, vecchie consuetudini, snellezza di linguaggio, **invece di** parlare di un numero razionale dichiarandolo rappresentato da una opportuna frazione, lo **si identifica** con tale frazione.



UNIFE D. Mari

Ciò può creare qualche confusione perché, mentre il **numero razionale** in questione è **uno solo**, le **frazioni** atte a rappresentarlo sono **infinite**.

I razionali sono dunque *numeri* che traducono la caratteristica specifica di ogni classe di frazioni fra loro equivalenti.



UNIFE D. Mari

Poiché vogliamo che l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali sia un **sistema numerico** e che sia un *ampliamento* dell'insieme dei numeri interi, occorre:

1. poter considerare gli interi come particolari razionali;
2. dotare \mathbb{Q} di operazioni (*struttura algebrica*) tali che, applicate agli interi, coincidano con quelle ivi già preesistenti.



UNIFE D. Mari

Il primo passo non è difficile:
i razionali che soddisfano questa esigenza
sono quelli rappresentabili dalle frazioni del
tipo $\frac{m}{1}$ che si decide di far coincidere con
l'intero m ,
e con loro tutte le
loro equivalenti

$$\frac{mn}{n}$$





UNIFE D. Mari

Occorre poi definire l'operazione di *addizione*, che vogliamo soddisfi tutte le solite proprietà già viste con gli interi, proprio perché, ristretta ad essi, dovrà coincidere con quella nota.

Gli studenti hanno già visto la definizione di addizione:

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{ns}$$



UNIFE D. Mari

Molti hanno forse imparato a utilizzarla correttamente, ma certamente in pochi l'hanno interiorizzata, come evidenziano molti dei cosiddetti errori tipici.

In fondo in fondo, rimane il dubbio: **perché una formula così complicata?**

E' proprio adesso che si ha l'opportunità di verificare se il concetto di numero razionale appena dato è stato compreso.



UNIFE D. Mari

Occorre infatti qui sottolineare che, sì, **si lavora con le frazioni**, ma **si deve ragionare** in termini **di numeri razionali**.

Dunque l'addizione fra razionali, e più tardi la moltiplicazione, deve essere *ben posta*, cioè definita in modo che il **risultato non dipenda** dalle particolari rappresentazioni frazionarie scelte.



UNIFE D. Mari

Si scopre allora subito che la formula **più desiderata**, anche se sappiamo **sbagliata**,

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \dots \frac{m+r}{n+s} \quad !$$

non può andar bene, perché, per esempio, darebbe

$$\frac{10}{1} + \frac{7}{1} = \dots \frac{17}{2} \quad !$$

mentre sappiamo che , visti come interi , vale

$$10 + 7 = 17$$



Ma perché proprio l'altra?

Tornando al significato elementare di frazione,
risulta evidente che

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \frac{m+k}{n}$$

Ma più in generale ?

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = ?$$



UNIFE D. Mari

Il modo più semplice è sostituire a $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ delle frazioni ad esse equivalenti aventi stesso denominatore o, come si dice comunemente, *ridurre allo stesso denominatore*, e poi procedere come fatto in precedenza. Ovviamente ci sono infinite frazioni equivalenti alle date aventi tutte uguale denominatore, ma le più evidenti sono quelle con denominatore ns .



Sostituendo quindi a $\frac{m}{n}$ la frazione equivalente $\frac{ms}{ns}$ e a $\frac{r}{s}$ la frazione equivalente $\frac{nr}{ns}$ ecco che risulta



$$\frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms+nr}{ns}$$



UNIFE D. Mari

Schematicamente:

- Se i **denominator** i sono uguali



$$\frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \frac{m+k}{n}$$



- **Sommo i numeratori**



- Se i denominatori sono diversi

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms+nr}{ns}$$

$n \neq s$

- Moltiplico i denominatori fra loro e moltiplico **in croce** i numeratori

- ottengo denominatori uguali
- e quindi sommo i numeratori.



UNIFE D. Mari

Naturalmente bisognerebbe verificare che la definizione data è ben posta, cioè che non dipende dalla particolare rappresentazione scelta ad indicare i razionali in gioco;

inoltre occorrerebbe verificare che, riferita a razionali interi, restituisce lo stesso risultato già noto.

Ma sorvoliamo



UNIFE D. Mari

Viene invece data molta importanza alla “necessità” di determinare il m.c.m. dei denominatori.

Ripeto ancora quanto già osservato:

non è sempre così **semplice** determinare il **m.c.m.** fra due qualunque naturali.

Tale prassi seguirà per comodità di calcolo dall'esercizio ripetuto con numeri opportuni didatticamente,



UNIFE D. Mari

ma questi non costituiscono il caso generale.

Si pensi, ad esempio, di voler eseguire

l'addizione: $\frac{1}{1677} + \frac{1}{1651}$

Piuttosto che determinare il m.c.m. dei denominatori è certamente più economico applicare la definizione:

$$\frac{1}{1677} + \frac{1}{1651} = \frac{1651+1677}{1677 \cdot 1651}$$

e concludere con una calcolatrice tascabile.



UNIFE D. Mari

Molto altro ancora dovrebbe essere detto,
per esempio relativamente a:

Le proprietà dell'addizione;

Definizione e proprietà della moltiplicazione;

La relazione d'ordine e la sua compatibilità
con le operazioni;

E, perché no, la proprietà archimedea e la
numerabilità.



UNIFE D. Mari

Voglio invece concludere con il quesito,
raramente chiarito,

Perché l'espressione $\frac{m}{0}$ non ha significato?





UNIFE D. Mari

E' noto che il prodotto di un qualunque razionale per 0 dà 0.

Ciò implica che 0 *non può avere reciproco*, (non può esistere alcun razionale che, moltiplicato per 0, dia 1).

Molti autori a questo punto concludono: “perciò l'espressione $\frac{1}{0}$ (che starebbe ad indicare il reciproco di 0), non ha significato”



UNIFE D. Mari

come se $\frac{1}{0}$, per avere diritto ad esistere, debba necessariamente essere il reciproco di 0.

Di fatto, l'impossibilità di dare diritto di cittadinanza alle frazioni $\frac{m}{0}$ dipende, non solo dalla proprietà assorbente di 0, ma anche dalla relazione di equivalenza da cui nasce \mathbb{Q} .



UNIFE D. Mari

Su frazioni di tale tipo infatti, la relazione di equivalenza sopra definita implicherebbe l'equivalenza fra $\frac{m}{0}$ e $\frac{k}{0}$ per qualunque m , k essendo sempre

$$m \cdot 0 = k \cdot 0$$

Dunque, tutte le frazioni $\frac{m}{0}$ starebbero nella stessa classe, risultato che potrebbe anche essere accettabile.



UNIFE D. Mari

Si scopre subito però che tra esse se ne nasconde una illegittima, la frazione $\frac{0}{0}$. Essa infatti risulterebbe non solo equivalente a $\frac{m}{0}$ ma anche $\frac{0}{m}$, $m \neq 0$ e ciò implicherebbe che anche $\frac{m}{0}$ e $\frac{0}{m}$ sarebbero equivalenti fra loro, relazione chiaramente non vera.



UNIFE D. Mari

Se dunque vogliamo che la relazione data sia di equivalenza, dobbiamo negare alla scrittura $\frac{0}{0}$ la possibilità di esistere.

Purtroppo, anche le frazioni $\frac{m}{0}$ con $m \neq 0$ non si comportano bene se concediamo loro l'opportunità di rappresentare un numero razionale.



UNIFE D. Mari

Non appena cerchiamo di sommarle ad un qualunque altro razionale “regolare” $\frac{r}{s}$, con $r, s \neq 0$, e rispettiamo le regole che ci siamo dati in \mathbb{Q} , otteniamo:

$$\frac{m}{0} + \frac{r}{s} = \frac{ms + 0 \cdot r}{0 \cdot s} = \frac{ms}{0 \cdot s} = \frac{m}{0}$$

uguaglianza non vera (unicità dell'elemento neutro additivo).



UNIFE D. Mari

Di conseguenza tutte le frazioni $\frac{m}{0}$, indegne di rappresentare un numero razionale, vengono espulse non solo da \mathbb{Q} , ma anche dallo stato di frazione.





UNIFE D. Mari



COSI' LA TORTA RESTA INTERA



UNIFE D. Mari

Riferimenti Bibliografici.

Baruk S. (2003). *Dizionario di Matematica elementare*. Bologna: Zanichelli

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora

Mari D. (2008). Frazioni e numeri razionali. *Quaderni di didattica della Matematica, II*. Ferrara: Università degli studi di Ferrara

Mari D. (2011). Le frazioni sono ancora difficili. *Pedagogia più didattica, 3*. Trento: Erickson