



Università di Ferrara

fondata nel 1391

Alessandra Fiocca

Le frazioni e i primordi della matematica

Alle radici della matematica: i problemi

Le radici della matematica si trovano nei problemi. Il concetto di numero nasce sotto la spinta della necessità e in base a criteri di utilità estese il suo campo.

- Quando si parla di “numero” generalmente si intende il numero naturale. Essi sono tanto familiari all’uomo da millenni da far esclamare al famoso matematico Kronecker: “Dio creò i numeri naturali, tutto il resto è opera dell’uomo”.
- Le stesse esigenze pratiche della vita quotidiana condussero all’introduzione delle ordinarie frazioni $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$, ecc. Tali numeri si dicono “razionali” non perché sono ragionevoli, ma perché sono rapporti di numeri interi (dal latino *ratio* = rapporto)

I numeri irrazionali

La scoperta che le consuete frazioni non sono sufficienti ad appagare le esigenze della geometria venne fatta dai Greci più di 2500 anni fa.

Essi osservarono che la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario non poteva essere espressa da alcun numero razionale.

Oggi noi esprimiamo tale circostanza dicendo che la radice quadrata di 2 è un numero irrazionale.

Geometricamente ciò significa che non esiste alcuna unità di lunghezza, nessun segmento per quanto piccolo, che sia contenuto esattamente (cioè un numero intero di volte) sia nella diagonale, che nel lato del quadrato.








Si aprì così una crepa nella struttura logica della geometria, che verrà colmata dalla teoria delle proporzioni tra grandezze di Eudosso di Cnido (IV sec. a. C.), teoria esposta da Euclide nel V libro dei suoi Elementi.

Sistemi di numerazione dell'antichità

- Nei sistemi di numerazione sviluppati presso popoli appartenenti a ceppi linguistici differenti si riscontra una distinzione fonetica, linguistica e una denominazione autonoma dei primi dieci numeri.
- Fu la macchina da conteggio e calcolo rappresentata dalle dieci dita della mano a imporre un sistema di numerazione decimale. Sui primi dieci numeri si articolano poi i successivi.

Antico Egitto

- La principale fonte sulla matematica dell'antico Egitto è il papiro di Rhind, da Henry Rhind che lo acquistò nel 1858 e lo vendette al British Museum. Lungo oltre 5 metri contiene 87 problemi. Nel 1650 a.C. lo scriba Ahmes copiò il testo da un documento più antico di 200 anni.
- La scrittura dei numeri in caratteri geroglifici usava i seguenti simboli per i multipli della decina:

						
1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Egyptian numeral hieroglyphs

L'aritmetica degli Egizi

- Additiva anche per la moltiplicazione e la divisione. Esempio
 12×12

1	12	
2	24	($=12 \times 2$)
2^2	48	($=12 \times 2^2$)
2^3	96	($=12 \times 2^3$)

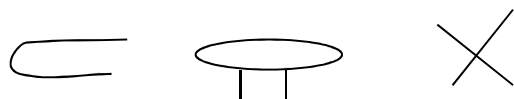
$$12 \times 12 = (2^3 + 2^2) \times 12 = 2^3 \times 12 + 2^2 \times 12 = 96 + 48 = 144$$

$$13 \times 12 = (2^3 + 2^2 + 1) \times 12 = 2^3 \times 12 + 2^2 \times 12 + 12 = 96 + 48 + 12 = 156$$

Le frazioni nel sistema degli Egizi

- Il simbolo  posto sopra il numero intero indicava la frazione avente numeratore 1 e denominatore il numero.

Frazioni speciali erano $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ che avevano simboli speciali



- A parte poche frazioni speciali, tutte le altre venivano decomposte in frazioni aventi 1 al numeratore (“unitarie”)
- $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$;
- Nel papiro di Rhind si trova una tavola con la decomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo **$\frac{2}{a}$** con **a numero dispari** da 5 a 99
- <http://www.dm.uniba.it/ipertesto/egiziani/tabella.doc>

2 DIVISO PER :

SIMBOLI

3

$$\frac{2}{3}$$

5

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

7

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

9

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

11

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

13

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

15

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

17

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$$

19

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

21

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$$

23

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$$

25

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{75}$$

27

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$$

, , , ,

Uso della tavola di decomposizione

- Così utilizzando la tavola si potevano trasformare le frazioni ad esempio:

$$4/15 = (2+2)/15 = 2/15 + 2/15$$

leggendo nella tabella la scomposizione di $2/15 = 1/10 + 1/30$ si giungeva alla seguente espressione per la frazione

$$4/15 = 2/10 + 2/30 = 1/5 + 1/15$$

Babilonesi: simboli numerici e sistema posizionale

La fonte primaria sulla matematica dei Babilonesi è costituita da un migliaio di tavolette di argilla in cui sono presentati problemi e relative soluzioni.

La scrittura cuneiforme comprendeva due simboli per scrivere tutti i numeri, un cuneo verticale per l'unità e un cuneo orizzontale per la decina.

Il sistema numerico babilonese era posizionale in base 60. Una spaziatura fra gruppi di cunei permetteva di distinguere le posizioni che, lette da destra a sinistra, corrispondevano a potenze crescenti della base 60. Inizialmente non c'era un simbolo per lo zero, così era il contesto del problema che determinava il valore del numero.

1	𐎶	11	𐎶𐎵	21	𐎶𐎵𐎶	31	𐎶𐎵𐎶𐎵	41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶	51	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵
2	𐎶𐎶	12	𐎶𐎵𐎶𐎶	22	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	32	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	42	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	52	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
3	𐎶𐎶𐎶	13	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	23	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	33	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	43	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	53	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
4	𐎶𐎶𐎶𐎶	14	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	24	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	34	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	44	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	54	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	15	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	25	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	35	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	45	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	55	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	16	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	26	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	36	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	46	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	56	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	17	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	27	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	37	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	47	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	57	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	18	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	28	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	38	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	48	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	58	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	19	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	29	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	39	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	49	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	59	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
10	𐎶𐎵	20	𐎶𐎵𐎵	30	𐎶𐎵𐎵𐎵	40	𐎶𐎵𐎵𐎵𐎵	50	𐎶𐎵𐎵𐎵𐎵𐎵		

Babilonesi: la scrittura dei numeri

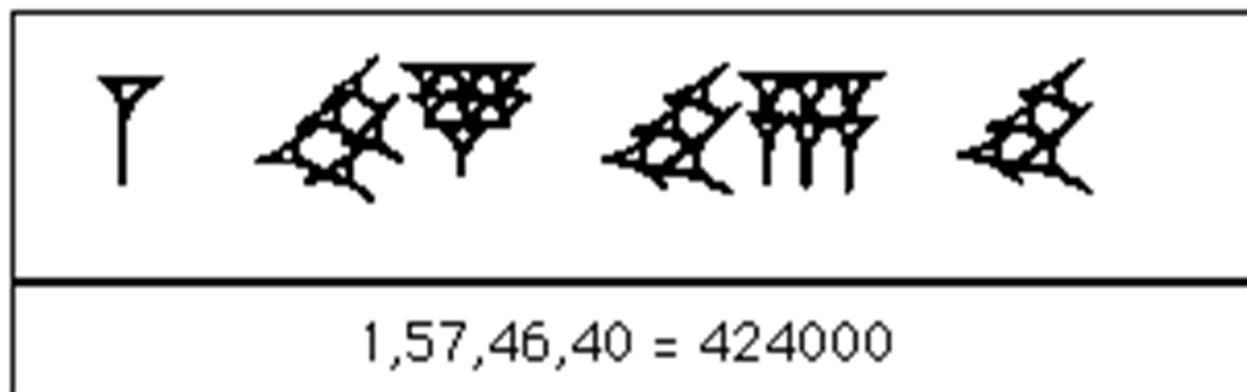
Il decimale 12345 rappresenta

$$1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5.$$

Anche nel sistema posizionale sessagesimale babilonese la posizione più a destra è per le unità fino a 59, la posizione successiva, procedendo verso sinistra, è per $60 \times n$ dove $1 \leq n \leq 59$, etc. Adottando la convenzione di separare con una virgola le posizioni, il numero sessagesimale 1,57,46,40 rappresenta il numero

$$1 \times 60^3 + 57 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40$$

che in notazione decimale è 424000. Il numero in caratteri cuneiformi veniva scritto così:



Babilonesi: la divisione e le frazioni

$$\blacksquare k/a = k \cdot 1/a$$

- In questo contesto entravano le frazioni che erano scritte in “decimali” sessagesimali, ovvero
- $1/2=30/60$; $1/3=20/60$; $1/4=15/60$; $1/5=12/60$; ecc.
- Avevano delle tavole che mostravano che i numeri della forma $1/a$, essendo a della forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ potevano essere scritti come numeri sessagesimali finiti

$$1/2^3 = 7/60 + 30/60^2$$

L'uso delle frazioni sessagesimali continua

- Le frazioni $1/7$, $1/11$, $1/13$ ecc danno luogo a sessagesimali infiniti periodici e le tavole dei Babilonesi fornivano valori approssimati
- Le frazioni sessagesimali, cioè numeri minori di 1 espressi mediante l'inverso delle potenze di 60, furono usate anche dagli astronomi greci (Ipparco e Tolomeo) e nel Rinascimento, fino alla fine del XVI secolo quando furono sostituiti dai decimali in base dieci.

Il nostro sistema di numerazione

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (c. 790 – c. 850) è l'autore di un'opera che, in traduzione latina, ha per titolo *Algoritmi de numero indorum*.



Leonardo Pisano (XIII secolo) noto come **FIBONACCI** nel *Liber abaci* (1202) trasmette in Occidente le *novem figurarum indorum*, lo zero “*arabice zephirum apellatur*”, il modo di scrivere tutti i numeri e di eseguire le operazioni aritmetiche.

Le frazioni nel *Liber Abaci*

- Nonostante l'uso della notazione posizionale, Fibonacci non conosceva la rappresentazione decimale delle frazioni.
- Ad esempio dividendo 297 per 125 otteniamo 2 con il resto di 47 e il risultato noi lo possiamo esprimere sia come $2 + 47/125$ ma anche come 2,376 (non conosciuta da F.).
- La rappresentazione decimale di una frazione ha il vantaggio di dare un'idea approssimata del valore della frazione
- Es. 0,376 è compreso tra 0,3 e 0,4, o anche tra 0,37 e 0,38. Ciò non appare se scriviamo $47/125$

Diverse scritture per le frazioni nel *Liber Abaci*

- L'usuale scrittura a/b (dove a denota quante parti si prendono di b parti dell'intero)
- **frazioni multiple** : $\frac{1}{2} \frac{4}{7}$

denota $4/7$ + la metà di $1/7$ cioè $9/14$

“*infilzare i rotti*”: passaggio da una frazione multipla a quella ordinaria; “*traslatare dei rotti*” il viceversa.

Regola di F. “I denominatori crescenti da sinistra a destra” .

Ragione: prendendo solo il primo termine $4/7$ (cioè numeratore e denominatore di destra) si ottiene usualmente un'approssimazione migliore

Diverse scritture per le frazioni nel *Liber Abaci*

- L'usuale scrittura a/b (dove a denota quante parti si prendono di b parti dell'intero)
- **frazioni multiple** : $\frac{1}{2} \frac{4}{7}$

denota $4/7$ + la metà di $1/7$ cioè $9/14$

“*infilzare i rotti*” era detto il passaggio da una frazione multipla a quella ordinaria; “*traslatare dei rotti*” il viceversa.

Regola di F. “si deve fare in modo che sempre i numeri minori siano verso sinistra sotto la stessa linea”. Ragione: prendendo solo il primo termine, cioè numeratore e denominatore di destra, si ottiene usualmente un'approssimazione migliore. Ad esempio la frazione $7/20$ si può scrivere nelle due forme

$$\frac{1}{2} \frac{3}{10} \qquad \frac{7}{10} \frac{0}{2}$$

la prima dà $3/10$ come approssimazione, la seconda non dà alcun valore approssimato.

Le frazioni unitarie nel *Liber Abaci*

- Scomporre una frazione nella somma di frazioni aventi numeratore uguale a 1 (residuo di epoche lontane)
- Nel papiro di Rhind solo frazioni con numeratore 2 .
Fibonacci prende in considerazione tutte le frazioni
- Curiosità: **papiro di Rhind**: Sette case in ognuna sette gatti ogni gatto uccide sette topi ogni topo mangia sette grani ogni grano produce sette hekat. Qual è il totale di tutti?
- **Fibonacci**: Sette vecchie vanno a Roma ognuna ha sette muli ogni mulo ha sette sacchi in ogni sacco ci sono sette pani ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti
- **Oggi**: per una strada che andava a Camogli incontrai un uomo con sette mogli,

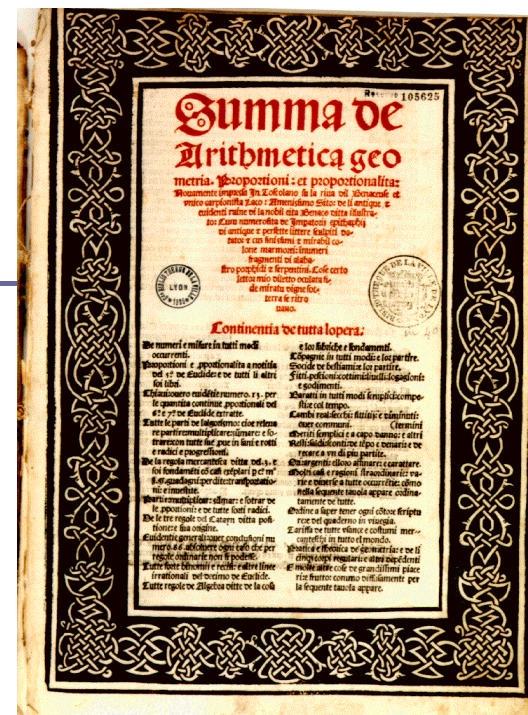
XVI secolo: necessità pratiche per un'aritmetica più avanzata

La necessità di valutazioni quantitative “s sofisticate” :

- Scoperte geografiche che comportarono lo sviluppo degli studi astronomici, la necessità di tavole astronomiche migliori, e quindi di tavole trigonometriche più precise
- Attività commerciali e bancarie
- Attività tecniche: architettura, ingegneria militare, civile e idraulica, balistica, agrimensura, costruzione di strumenti di misura del terreno, del tempo, astronomici ecc

Opere di aritmetica

- Luca Pacioli *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalità* (Venezia 1494)
- Nicolò Tartaglia *General Trattato de' numeri e misure* (prima parte, Venezia 1556)



L'introduzione dei decimali dopo la virgola: Stevin

Simon Stevin di Bruges (1548-1620).

intendente generale dei lavori pubblici nelle Province Unite, si occupò principalmente di opere idrauliche.

Pubblicò circa una decina di opere con contributi su trigonometria, meccanica, statica, prospettiva, architettura, teoria musicale, geografia e navigazione.



De Thiende (Il Decimale) 1585

introdusse quelli che con pochi perfezionamenti formali divennero i nostri “decimali dopo la virgola” e il relativo calcolo.

In questo modo vennero eliminate le frazioni a denominatore 10, 100, 1000, ecc. e il sistema decimale acquistò la funzionalità ottimale.

Il sistema decimale rimase escluso dalle misure del tempo e degli angoli in cui restò in vigore il sistema, di origine babilonese, in base 60.

- <http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10ths.html>

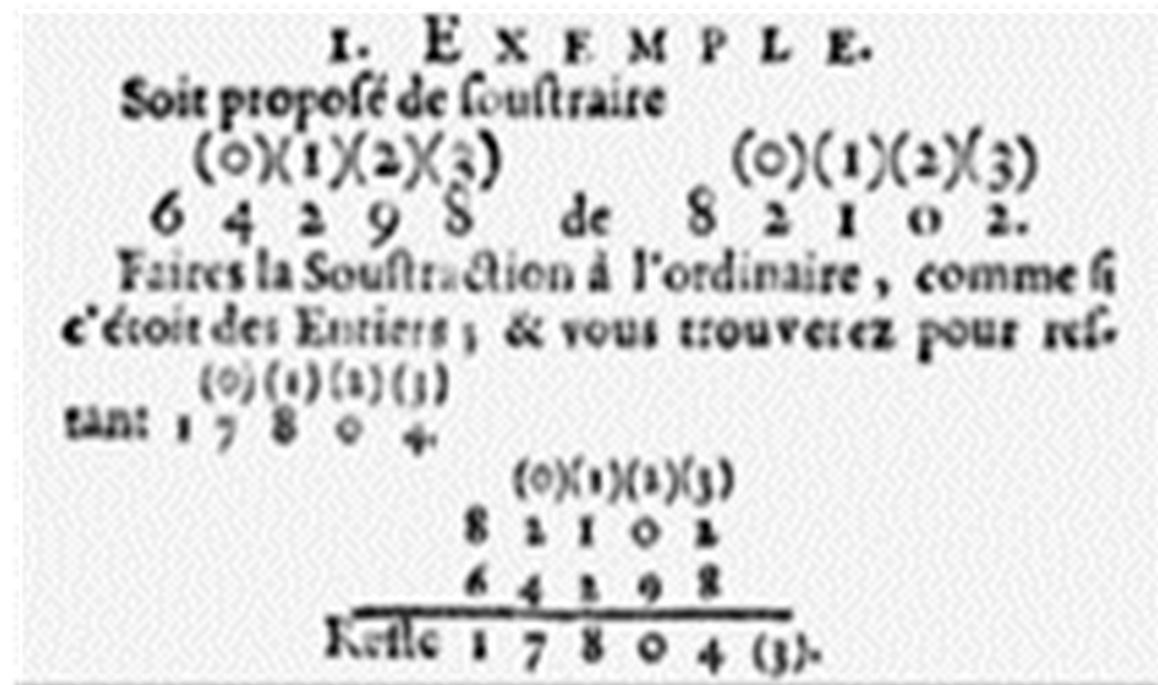


La notazione di Stevino

Sopra ogni decimale (qui indicato di fianco) si trova un numero all'interno di una parentesi

64 (0) 2 (1) 9 (2) 8 (3) sta per 64,298

Si tratta di una notazione esponenziale. Scriviamo al posto di 64 (0) 2 (1) 9 (2) 8 (3) più esplicitamente $64 (1/10)^0 2 (1/10)^1 9 (1/10)^2 8 (1/10)^3$ e assumiamo di rappresentare $(1/10)^n$ con (n)



Aritmetica e algebra in Stevino

- Vi è somiglianza tra il simbolismo per rappresentare i numeri decimali e il simbolismo algebrico utilizzato da Stevino in cui l'espressione

3 (2) 9 (1) 5 (0) significa $3x^2 + 9x + 5$.

Una più profonda comprensione dei numeri

- Nel nuovo sistema di scrittura dei numeri proposto da Stevino erano concepiti solo decimali finiti, così con la notazione steviniana potevano essere rappresentati solo certi razionali.
- Altri numeri razionali potevano essere rappresentati solo per approssimazione.
- Di questo Stevino ne era consapevole.
- La notazione di Stevino fu seguita da Clavio e Nepero, ma alcuni matematici fecero resistenza considerandola un passo indietro, in quanto non permetteva di rappresentare esattamente semplici frazioni come la frazione $1/3$.

Tutti sono numeri

- Nell'*L'Arithmetique* (1585) Stevino sostenne che anche le radici quadrate di numeri non quadrati, e altre simili espressioni che a quei tempi venivano chiamati numeri sordi, ficti, ecc., dovevano essere trattati come numeri e non considerati di natura differente.
- Scrisse a riguardo: l'unità è un numero; ogni numero può essere elevato al quadrato, al cubo, alla quarta potenza, ecc. ; ogni radice è un numero; non ci sono numeri “assurdi”, “irregolari”, “sordi” ecc.

Conclusioni

- Prima che Stevino proponesse l'uso delle frazioni decimali il concetto di numero si era sviluppato ben poco rispetto all'epoca euclidea.
- Ulteriori progressi nello sviluppo della teoria dei numeri reali furono possibili solo dopo che concetti matematici come quello di limite e di convergenza venissero posti su basi teoriche solide.

Ciò avvenne solo nel corso del XIX secolo grazie alle conquiste matematiche di Cauchy, Bolzano, Dedekind, Weierstrass, Cantor.

Bibliografia

- Ettore Picutti, *Sul numero e la sua storia* (Feltrinelli Economica, 1976)
- Gay Robins, Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus an ancient Egyptian text*, Dover Publications, 1987
- Ivan Niven, Numeri razionali e numeri irrazionali, Zanichelli
- *Un ponte sul mediterraneo. Leonardo Pisano la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Il Giardino di Archimede, 2002
- Sito web: *Mac Tutor for history of Mathematics* per Stevin. Si veda anche la voce *Real number from Plato to Stevin*.